## 基础课41 空间向量与空间角、距离问题

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 空间向量求空间角 | 掌握 | 2023新高考Ⅰ卷  2023新高考Ⅱ卷  2023全国乙卷理  2022新高考Ⅰ卷  2022全国甲卷（理）  2021全国乙卷（理）  2021全国乙卷（文） | ★★★ | 直观想象逻辑推理数学运算 |
| 空间向量求空间距离 | 掌握 | 2023年天津卷  2022年新高考Ⅰ卷 | ★★★ | 直观想象逻辑推理数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，空间角、距离问题是高考常考内容，一般以解答题的形式出现，试题难度中等.命题常以柱体、锥体为背景.在2025届的高考备考中，要掌握并运用向量法解空间角和距离问题，要特别重视坐标系的建立，同时要加强运算求解能力的训练 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、空间向量与空间角

在立体几何中常涉及三类空间角的求解：异面直线所成的角、直线与平面所成的角和两个平面的夹角.具体如表所示:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 空间角 | 向量求法 | 范围 |
| 异面直线所成的角 | 若异面直线,所成的角为，其方向向量分别是,，则, | ③ |
| 直线与平面所成的角 | 设直线与平面所成的角为，直线的方向向量为，平面的法向量为，则, | ⑥ |
| 二面角 | 平面与平面相交于直线，平面的法向量为，平面的法向量为，,，则二面角为或.设二面角大小为，则 | ⑧ |
| 两个平面的夹角 | 若平面,的法向量分别是,，则平面与平面的夹角即为向量和的⑨夹角或其⑩补角；设平面与平面的夹角为，则,⑪⑫ | ⑬ |

【提醒】关注三种角的易错点

1.异面直线所成的角与其方向向量的夹角：当异面直线的方向向量的夹角为锐角或直角时，就是该异面直线的夹角；否则向量夹角的补角是该异面直线所成的角．

2.直线与平面所成的角：在上述求法中要注意的是，而不是．

3.二面角与法向量的夹角：利用平面的法向量求二面角的大小时，若求出两个半平面 ， 的法向量，，则需根据向量坐标在图形中观察法向量的方向，从而确定二面角与向量，的夹角是相等，还是互补．

##### 二、空间向量与距离

|  |  |
| --- | --- |
| 直线外一点到直线的距离 | 如图，直线的单位方向向量为，设，则向量在直线上的投影向量⑭，则点到直线的距离为⑮ |
| 平面外一点到平面的距离 | 如图，已知平面 的法向量为，为平面 内的定点，是平面 外一点，过点作平面 的垂线，交平面 于点，是直线的方向向量，则点到平面 的距离⑯⑰ |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 直线的方向向量和平面的法向量所成的角就是直线与平面所成的角.( × )

（2） 两个平面的法向量所成的角就是这两个平面的夹角.( × )

（3） 若直线平行于平面 ，则直线上各点到平面 的距离相等.( √ )

（4） 若直线上两点到平面 的距离相等，则平行于平面 .( × )

2. （易错题）在长方体中，，，则与平面所成角的正弦值为.

**【易错点】**未理解直线与平面所成的角的定义.

[解析]

建立如图所示的空间直角坐标系，由于，，

所以，，，.

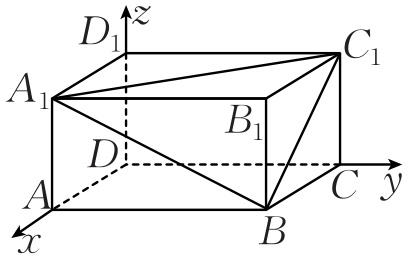
所以，，，

设平面的一个法向量为，则

即

令，则，，则.又设与平面所成的角为 ，

则.

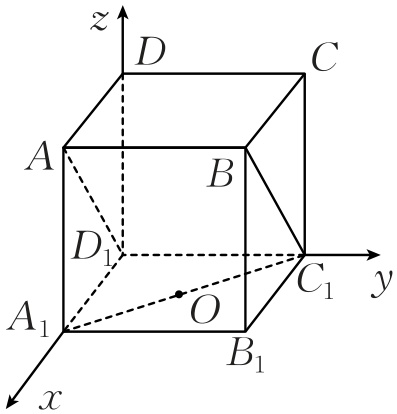


##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修①P35·T2改编）若正方体的棱长为1，是的中点，则点到平面的距离为( B ).

A. B. C. D.

[解析]建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，,，，，所以，，.设平面的一个法向量为，则令，得，故点到平面的距离.故选.



4. （人教A版选修①P43·T10改编）设，分别是正方体的棱和的中点，则直线与平面所成角的正弦值为 .

[解析]建立如图所示的空间直角坐标系，设，

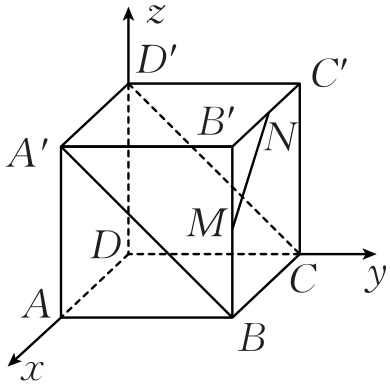
则，，，，，

则，，.

设平面的一个法向量为，

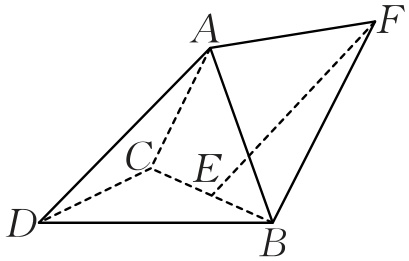
故令，则，，所以，

所以与平面所成角的正弦值为.



##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅱ卷改编]如图，在三棱锥中，，， ，为的中点,点满足，则二面角的正弦值为.



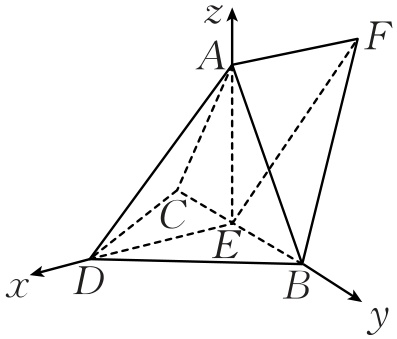
[解析]设，

由 ，可知,都为等边三角形，

所以.又，

所以，

所以，则为直角三角形，且 ，



所以，，.

又，， 平面, 平面，所以 平面.

以为坐标原点，,,所在直线分别为,,轴建立空间直角坐标系，如图所示,

则，，，，

设，则，

所以，.设平面的一个法向量为，

则即令,则,,

所以.

又.设平面的一个法向量为，

则

即令,则,,所以.所以，则.所以二面角的正弦值为.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 空间角［多维探究］

##### 异面直线所成的角角度1

典例1 已知直三棱柱的所有棱长都相等，为的中点，则与所成角的正弦值为( C ).

A. B. C. D.

[解析]取线段的中点，连接，则，设直三棱柱的棱长为2，

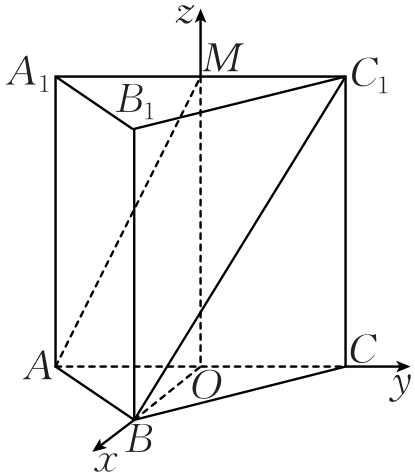
以点为原点，,,的方向分别为轴、轴、轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，

则，，，，

所以，，,，

所以.

故选.





**用向量法求异面直线所成的角的一般步骤**

1.建立空间直角坐标系；

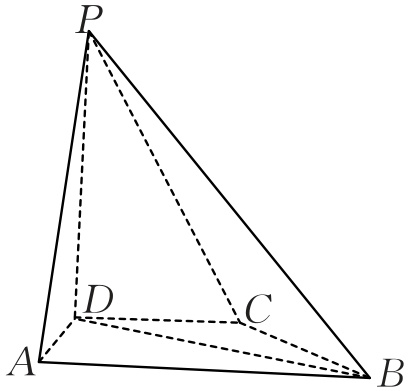
2.用坐标表示两异面直线的方向向量；

3.利用向量的夹角公式求出向量夹角的余弦值；

4.注意两异面直线所成角的范围是，，即两异面直线所成角的余弦值等于两向量夹角的余弦值的绝对值.

##### 直线与平面所成的角角度2

典例2 [2022·全国甲卷]如图，在四棱锥中， 底面，,,,.



（1）求证：.

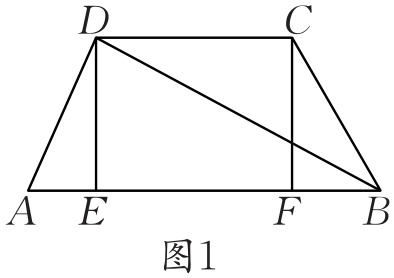
（2）求与平面所成的角的正弦值.

[解析]（1）如图1，在四边形中，作于点，于点，

因为,,，所以四边形为等腰梯形，

所以，故，，所以，所以，

因为 平面， 平面，所以，又， 平面, 平面,所以 平面，又 平面，所以.

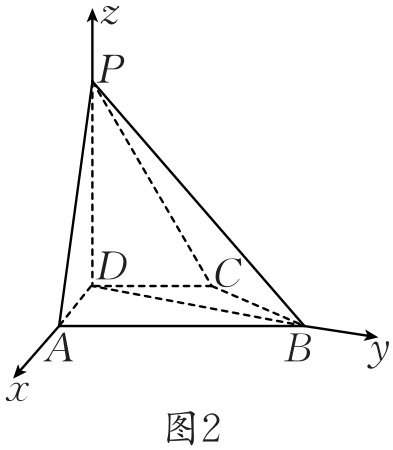


（2）如图2，以点为原点建立空间直角坐标系，，则,,，则,,，

设平面的一个法向量为，

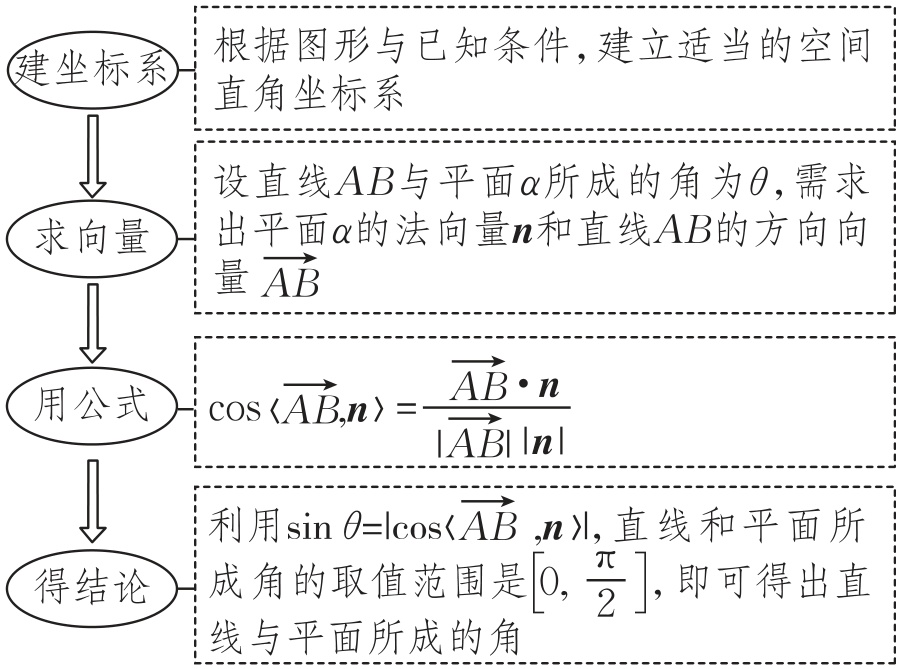
则令,则,，所以，

则,所以与平面所成角的正弦值为.



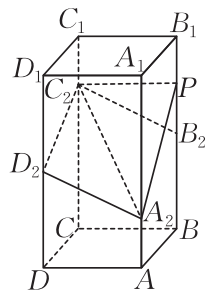


**利用空间向量求线面角的解题步骤**



##### 平面与平面所成的角角度3

典例3 [2023·新高考Ⅰ卷节选]如图，在正四棱柱中，,.点,,,分别在棱,,,上，,,.若点在棱上，当二面角为 时，求.



[解析]以为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则,,,设，

则,,，

设平面的一个法向量为，

则

令，得 ,，，

设平面的一个法向量为，

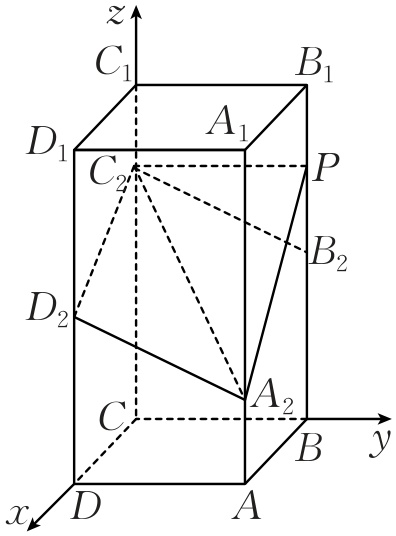
则

令，得,，，

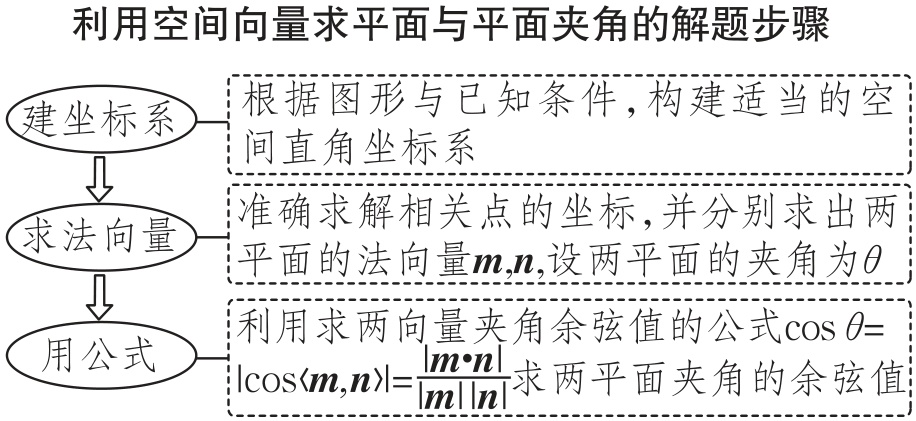
，

化简可得，，解得或，

或，.



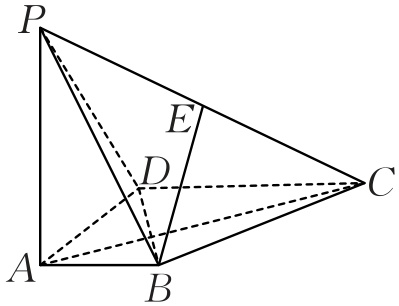




##### 多维训练

（一题练透）如图，在四棱锥中， 平面，,，

，,为棱的中点.

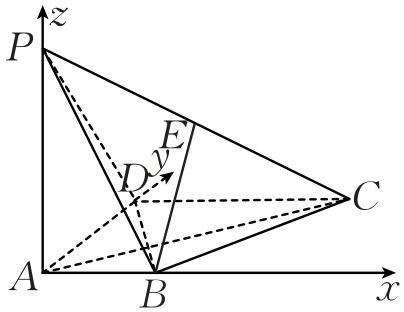


（1）求异面直线与所成角的正切值；

（2）求直线与平面所成角的正弦值;

（3）若为棱上一点,满足,求二面角的余弦值.

[解析]依题意，以点为原点,,,所在直线分别为,,轴，建立空间直角坐标系（如图），



可得,,,.由为棱的中点,得.

（1）,,,

，则,，所以,.

（2）,，.设为平面的一个法向量,则即不妨令,可得，

于是,，

即直线与平面所成角的正弦值为.

（3），，，.

由点在棱上,设,，故.

由,得，即，

解得，即,,.

设为平面的一个法向量,则即

不妨令,可得.

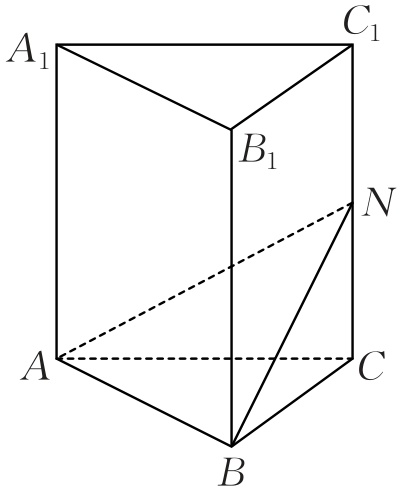
取平面的一个法向量为,则.

易知二面角是锐角,故其余弦值为.

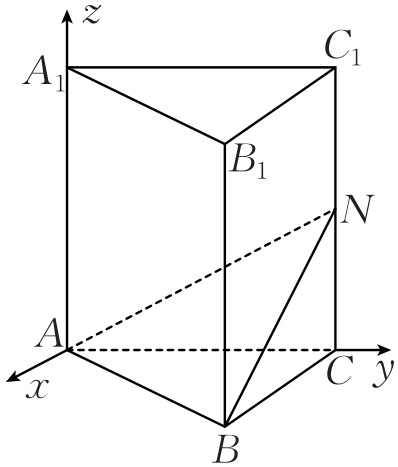
#### 考点二 空间距离［多维探究］

##### 点到直线的距离角度1

典例4 [2024·徐州模拟]如图，在正三棱柱中，各棱长均为4，是的中点.求点到直线的距离.



[解析]建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，.



，，则,.

设点到直线的距离为，

则.



**用向量法求点线距的三个步骤**

1.求出直线的单位方向向量；

2.求出所求点到直线上一点的向量及其在直线方向向量上的投影向量；

3.代入公式计算.

##### 点到平面、线到平面的距离角度2

典例5 （1）（同源变式）将典例4中的设问“求点到直线的距离”改为“求点到平面的距离”，试求解.

（2）（同源变式）将典例4中的条件“是的中点”改为“,分别是,的中点”，试求直线到平面的距离.

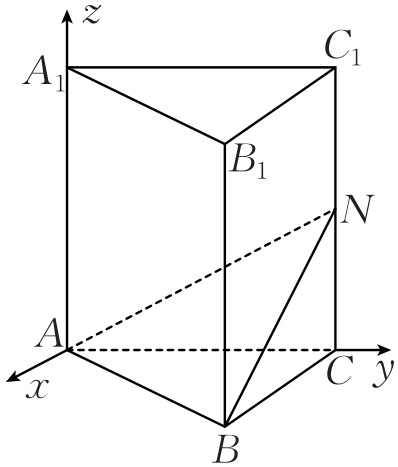
[解析]（1）建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，.

由是的中点，则，,,

设平面的一个法向量为，则

令，则，，得,,，而，

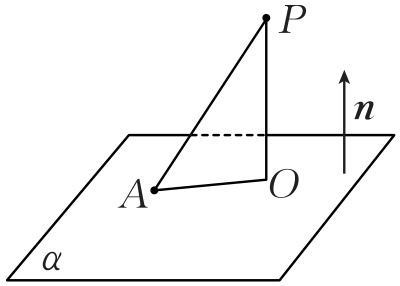
设点到平面的距离为，则.



（2）易知,则直线到平面的距离等于点到平面的距离.后同（1）.



**用向量法求点面距的四个步骤**



1.建系：建立恰当的空间直角坐标系；

2.求点坐标：写出（求出）相关点的坐标；

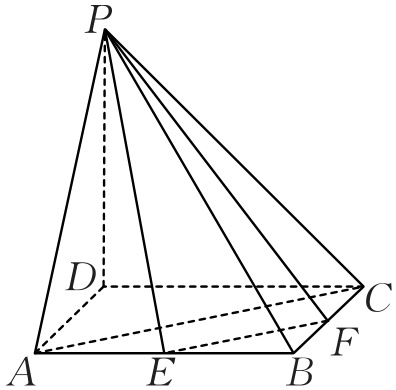
3.求向量：求出相关向量的坐标,平面 内两个不共线的向量，平面 的法向量；

4.求距离：.

【注意】用向量法求线面距，先利用平行转化为求点面距，再参照上述四个步骤.

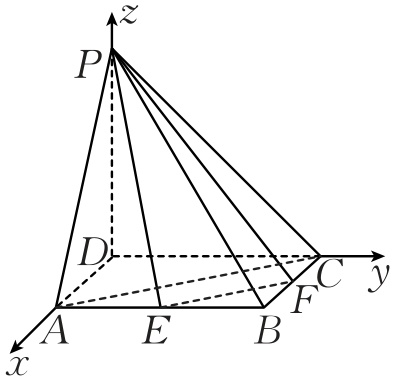
##### 多维训练

[2024·江苏模拟]（一题练透）如图，已知正方形的边长为1， 平面，且，，分别为，的中点.



（1） 求点到平面的距离；

[解析]建立如图所示的空间直角坐标系，则,，,,，,1,，，



,,，,,，,,，

设平面的一个法向量为，则

令,则,,

故， 点到平面的距离.

（2） 求直线到平面的距离.

[解析]， 直线到平面的距离即点到平面的距离，

又,,， 点到平面的距离， 直线到平面的距离为.